Det modallogiske systemet S0.5

Morten Rognes

1971

(Renskrevet og bearbeidet høsten 2008)

@ Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Systemet S0.5 ble først formulert og undersøkt av Lemmon i Lemmon [1]. Det har senere blitt studert av Cresswell i Cresswell [1]. Cresswell formulerer en semantisk teori for systemet og viser at det er fullstendig.[1] Systemet er ganske kuriøst. Lemmon antyder at modaloperatoren L i systemet kan tolkes som "Det er en sannhetsfunksjonell tautologi at". Ser man på aksiomene og slutningsreglene i systemet, slik de er angitt i neste paragraf, synes all teoremene i systemet å være sanne om denne tolkningen legges til grunn. Men det er selvfølgelig umulig å gi noe eksakt bevis for dette sålenge denne tolkningen ikke er presist definert. Man kunne muligens oppfatte Cresswells semantikk og den semantiske teorien som presenteres her som et forsøk på presisere denne tolkningen av systemet.

Formålet med dette notat er meget beskjedent. Hensikten er å vise at systemet er komplett med hensyn på en spesiell klasse av modeller, nærmere bestemt en underklasse av det vi kaller *halvsyntaktiske* modeller, de såkalte S0.5-modeller.

I §2 gjør vi rede for endel grunnleggende begreper av syntaktisk natur og presenterer presist en aksiomatisk formulering av systemet. I §3 defineres presist klassen av halvsyntaktiske modeller for den type språk setningslogiske språk utvidet med modaloperatorer som det arbeides med her. Vi angir også presist hvilke krav en halvsyntakisk modell må oppfylle for å være en S0.5-modell. Tilslutt i dette avsnittet gir vi et detaljert bevis for at alle teoremene i S0.5 holder i enhver slik S0.5-modell. Tilslutt gir vi i §4 et detaljert Henkin-bevis for at systemet er komplett.

§2 Grunnleggende syntaktiske begreper

Vi tar vårt utgangspunkt i et enkelt setningslogisk språk L hvor de primitive symbolene er: (i) en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver p;1, p;2, p;3,..... , videre (ii) de setningslogiske konnektivene $\rightarrow$ og $\neg$, som står for henholdsvis materiell implikasjon og negasjon, samt (iii) den monadiske modaloperatoren L. I tillegg til disse uttrykkene inngår de vanlige parantestegnene i L

De velformede formlene i L, vi betegner mengden av velformede formler med Fm(L), er avgrenset ved de følgende regler: (a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel. (b) Er α og β velformede formler så er også $(\neg\alpha)$, $(\alpha\rightarrow\beta)$ og $L\alpha$ velformede formler. (c) Ingen andre formler enn dem som er det etter reglene (a) og (b) er velformede formler.

Når det gjelder de andre vanlige setningslogiske konnektivene, disjunksjon, konjunksjon og bikondisjonal, samt mulighetsoperatoren M, defineres disse på følgende vis:

Definisjon 2.1

$\alpha \vee \beta = (\neg\alpha) \rightarrow \beta$

$\alpha \& \beta = \neg(\alpha \rightarrow (\neg\beta))$

$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$

1 Systemet er også omtalt i Hughes &Cresswell [1]. Se side 286 - 288. Her beskrives en Kripke-semantikk for systemet. Det blir også bevist at alle teoremer i systemet er S0.5-gyldige i den betydning som der defineres. Videre beskriver Hughes og Cresswell på de nevnte sider en avgjørelsesprosedyre for systemet. Systemet sammenlignes også med andre modalsystemer. Det vises blandt annet at det er genuint svakere enn S1.

@ Morten Harboe Rognes

$M\alpha \quad = \neg L\neg\alpha$

Med et setningslogisk aksiom i L forstår vi enhver formel som er en instans av ett av de følgende skjemaer:

(S1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
(S2) $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
(S3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

I de logikkene vi skal betrakte er det bare en slutningsregel, nemlig modus ponens. Som bekjent er dette

MP $\quad \vdash \alpha \ \& \ \vdash(\alpha \rightarrow \beta) \quad \rightarrow \quad \vdash \beta$

Med mengden av setningslogisk gyldige formler i L forstår vi den minste mengden av formler i L som inneholder alle instanser av skjemaene S1 - S3 og som er lukket under modus ponens. Vi sier at formelen α er bevisbar i setningslogikken, i symboler "PC|- α" hvis og bare hvis α er den siste formelen i en rekke av formler der hver formel enten er en instans av et av skjemaene S1 - S3 eller er sluttet fra to foregående formler i rekken ved hjelp av modus ponens. Man innser lett at α en setningslogisk gyldig formel hvis og bare hvis den er bevisbar i setningslogikken.

Systemet S0.5 er nå det systemet som i tillegg til aksiomskjemaene S1 - S3 også har de følgende to aksiomskjemaer:

A1 $\quad L\alpha \rightarrow \alpha$
A2 $\quad L\alpha \ \& \ L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow L(\beta)$

Ved siden av av slutningsregelen modus ponens har S0.5 bare den følgende slutningsregel som sier at dersom α er setningslogisk bevisbar så har man |- Lα. Regelen kan formlueres slik:

LPC $\quad PC\vdash\alpha \quad \rightarrow \quad \vdash L\alpha$

Dermed er systemet S0.5 fullstendig definert. En formel er bevisbar i S0.5 hvis og bare hvis den er den siste formelen i en endelig rekke av formler der hver formel (i) enten er en instans av et av skjemaene S1- S3, A1-A2 eller (ii) er sluttet fra tidligere formler i rekken ved hjelp av enten modus ponens eller regelen LPC. Vi skriver "S0.5 |- α" som forkortelse for "α er bevisbar i S0.5". En formel α sies å være et teorem i S0.5 hvis og bare hvis den er bevisbar i S0.5

§3 Modellteori for setningslogiske systemer i L. Halvsyntaktiske modeller

Med en sannhetsmengde, Δ, i L forstår vi en formelmengde Δ som oppfyller de følgende krav:
(i) For enhver setningsbokstav p i L har man enten at p eller ¬p er med i Δ. (ii) Er α en vilkårlig formel i L har man at $(\neg\alpha)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis det ikke er slik at α er med i Δ.
(iii) Er α,β vilkårlige formler i L har man at $(\alpha \rightarrow \beta)\hat{e}\Delta$ hvis og bare hvis man har at dersom α er med i Δ så er β det også.

Vi skal nå definere hva vi forstår med en halvsyntaktisk modell for L. Vi formulerer

denne definisjonen formelt slik:

Definisjon 3.1 Med en *halvsyntaktisk* modell M forstås et ordnet par <Δ,R> som oppfyller de følgende krav:

(i) Δ er en sannhetsmengde
(ii) R er en, muligens tom, mengde med formler i L
(iii) (Aα)(αêFm(L) → (Lα)êΔ ↔ αêR)

I det følgende skal vi kalle det som her har blitt omtalt som halvsyntaktiske modeller for modeller[2]. En formel α sies å være gyldig dersom vi har for enhver halvsyntaktisk modell M=<Δ,R> at αêΔ.

Før vi går videre innfører vi projeksjonsfunksjonen π på ordnete par ved de følgende stipulasjoner: Er a= <x,y> setter vi π;1(a) = x og π;2(a) =y. Det er med andre ord slik at dersom a er et ordnet par betegner π;1(a) den første komponenten i paret og π;2(a) den andre komponenten i paret. Trivielt har vi da at a= <π;1(a), π;2(a)> om a er et par.

Det er ganske lett å se at alle setningslogisk gyldige formler i L er gyldige i den betydning som er angitt her. Vi skal gi et detaljert bevis nedenfor selvom det er svært enkelt. Det er med andre ord slik at dersom α er en setningslogisk gyldig formel så har man at αêΔ for enhver halvsyntaktisk modell <Δ,R>. Legger man forskjellige krav på de halvsyntaktiske modellene vil det være flere formler i L som blir gyldige en bare de setningslogiske teoremene i L. Mengden av S0.5-modeller er en undermengde av mengden av halvsyntaktiske modeller. Den er avgrenset ved den følgende definsjon:

Definisjon 3.2 Med *en S0.5-modell M* forstås et ordnet par <Δ,R> som oppfyller de følgende krav for alle formler α,β i L :

(i) M er en halvsyntaktisk modell
(ii) Er Lαê Δ → αêΔ
(iii) Er α, α→βêR → βêR
(iv) PC |- α → αêR

En formel α sies å være S0.5-gyldig om det gjelder for enhver S0.5-modell M=<Δ,R> at αêΔ. Vi bruker "S0.5 ⊨ α" som forkortelse for "Formelen α er S0.5-gyldig".

Det resultat vi ønsker å vise kan kompakt formuleres slik:

Teorem 3.3 Er α en vilkårlig formel i L gjelder:

(a) S0.5|- α → S0.5 ⊨ α
(b) S0.5 ⊨ α ↔ S0.5 |- α

Som man ser innebærer teoremet at enhver formel i L er et teorem i S0.5 hvis og bare hvis formelen er S0.5-gyldig.

Bevis for (a): Vi skal gi bevis for gyldighetsdelen i denne satsen her. For det første må vi vise at alle instanser av de setningslogiske aksiomskjemaene S1 - S3 er S0.5-gyldige. Når det

2 Ganske enkelt fordi ordet uttrykket "modell" er kortere en "halvsyntaktisk modell". Når ordet "modell" brukes i det følgende skulle det uansett gå klart frem fra sammenhengen at det må dreie seg om den typen strukturer som er avgrenset ved Definisjon 3.1.

gjelder disse skjemaene vil det derfor være nok å vise at de alle holder i alle halvsyntaktiske modeller siden alle S0.5-modeller er slike halvsyntaktiske modeller.

(a) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Vi har åpenbart $\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$. Fra dette følger, siden Δ er en sannhetsmengde $\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$. Herav har vi så, igjen fordi Δ er en sannhetsmengde at $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \hat{e} \Delta$. Dette viser at S1 holder i alle halvsyntaktiske modeller.

(b) Anta M= <Δ, R> er en vilkårlig halvsyntaktisk modell. Anta α,β er vilkårlige formler i L. Det skulle være klart at vi på basis av ren setningslogikk har at
(1) $(\neg(\beta \hat{e} \Delta) \rightarrow \neg(\alpha \hat{e} \Delta)) \rightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$. Siden Δ er en sannhetsmengde har vi
(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta \leftrightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta)$ og (3) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} Fm(L) \rightarrow (\neg(\alpha \hat{e} \Delta) \leftrightarrow (\neg\alpha) \hat{e} \Delta))$. Fra (1) - (3) kan man slutte: (4) $((\neg\beta) \hat{e} \Delta \rightarrow (\neg\alpha) \hat{e} \Delta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav: $((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha)) \hat{e} \Delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Herav følger i sin tur, når man tar hensyn til kravet (iii) i definisjon av sannhetsmengde, at $S2 \hat{e} \Delta$. Det følger at S2 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(c) Anta M=<Δ,R> er en halvsyntaktisk modell og at α,β,γ er vilkårlige formler i L. Da har vi åpenbart $(\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow (\beta \hat{e} \Delta \rightarrow \gamma \hat{e} \Delta)) \rightarrow ((\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta) \rightarrow (\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \gamma \hat{e} \Delta))$. Ved å anvende kravet (iii) i definisjonen av sannhetsmengde ser man at vi har:

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \hat{e} \Delta)$ og derfor

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \hat{e} \Delta$. Herav følger så i sin tur, igjen ved hjelp av kravet (iii) i definisjonen vi ga av sannhetsmengde, at $S3 \hat{e} \Delta$. Siden modellen M og formlene α,β,γ var vilkårlig valgt, viser dette at enhver instans av S3 holder i enhver halvsyntaktisk modell.

(d) Anta C er en delmengde av de halvsyntaktiske modellene. Vi skal vise at dersom α og $\alpha \rightarrow \beta$ holder i alle modeller i C så gjør β det også, med andre ord skal vi vise at modus ponens bevarer C-gyldighet. Dette impliserer umiddelbart at dersom α og $\alpha \rightarrow \beta$ holder i alle S0.5-modeller vil også β gjøre det. Anta α og $\alpha \rightarrow \beta$ holder i enhver modell i mengden C. Dette innebærer at

(1) $(AM)(M \hat{e} C \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$ og
(2) $(AM)(M \hat{e} C \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \pi;1(M))$

Anta M= <Δ,R> er en vilkårlig modell i C. Da har vi fra (1) og (2) at
$\alpha \hat{e} \Delta$ & $(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Men siden Δ er en sannhetsmengde følger fra det at $(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$ at vi har $\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \beta \hat{e} \Delta$. Fra dette og det at $\alpha \hat{e} \Delta$ følger $\beta \hat{e} \Delta$. Siden M var et vilkårlig element i C har vi altså bevist: $(AM)(M \hat{e} C \rightarrow \alpha \hat{e} \pi;1(M))$, med andre ord at også β holder i alle modeller i C.

(e) Det er nødvendig å vise at A1 holder i alle S0.5-modeller. Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig S0.5-modell. Da har vi fra det andre kravet i Definisjon 3.2 at $L\alpha \hat{e} \Delta \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta$. Siden Δ er en sannhetsmengde følger herav $(L\alpha \rightarrow \alpha) \hat{e} \Delta$. Siden M var en vilkårlig S0.5-modell følger det at A1 holder i alle slike modeller.

(f) Anta M=<Δ,R> er en vilkårlig S0.5-modell. Anta (1) $L\alpha \hat{e} \Delta$ og (2) $L(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} \Delta$. Siden M er en halvsyntaktisk modell siden S0.5-modellene er en underklasse av de halvsyntaktiske, følger fra (1) og (2) at (3) $\alpha \hat{e} R$ & $(\alpha \rightarrow \beta) \hat{e} R$. Fra dette og Definisjon 3.2 kan man så slutte $\beta \hat{e} R$. Siden M er en halvsyntaktisk modell følger da $L\alpha \hat{e} \Delta$. Siden α,β var vilkårlige formler

slik at (1) og (2) holdt, har vi (4) Lαê∆ & L(α→β)ê∆ → L(β)ê∆. Men siden ∆ er en sannhetsmengde følger fra dette (Lα&L(α→β)→L(β))ê∆. Dette viser at også A2 holder i alle S0.5-modeller.

(g) Anta M=<∆,R> er en vilkårlig S0.5-modell. Da har vi i lys av Definisjon 3.2 at αêR om PC|-α. Siden M også er en halvsyntaktisk modell følger Lαê∆. Det følger altså at Lα holder i enhver S0.5-modell dersom PC|-α. Dette viser at også regelen LPC bevarer gyldighet.

Dermed har vi vist at alle aksiomer i S0.5 er gyldige og at reglene bevarer gyldighet. Det følger derfor at ethvert teorem i S0.5 må være S0.5-gyldig.

§4 Maksimalt konsistente mengder. Bevis for fullstendigheten til systemet S0.5.

I det følgende lar vi S stå for systemet S0.5 eller et hvilket som helst annet system som er en utvidelse av det setningslogiske systemet ovenfor.

Anta ∆ er en formelmengde i L. Vi sier da at den er *S-konsistent* hvis og bare hvis det ikke er slik at det finnes formler β;1,....,β;n (n>=1) slik at S |- ¬(β;1&...&;n). En mengde med formler ∆ i L kalles for maksimalt S-konsistent hvis og bare hvis vi har (i) at ∆ er S-konsistent og (ii) at det ikke finnes noen formel β i L som ikke er med i ∆ slik at ∆U{β} er S-konsistent.

En maksimalt S-konsistent formelmengde er altså en S-konsistent formelmengde som ikke kan utvides med noen nye formler uten at resultatet blir en formelmengde som ikke er S-konsistent. Vi skal ta for gitt den følgende sats, Lindenbaums lemma, som sier at enhver S-konsistent mengde kan utvides til en maksimalt S-konsistent mengde.

Teorem 4.1 Er ∆ en S-konsistent mengde med formler i L finnes det en mengde Γ med formler i L som er maksimalt S-konsistent og der ∆ er inkludert i Γ.

Når det gjelder beviset for denne satsen kan man konsultere Hughes & Cresswell [1], side 150 -152. Vi trenger også det følgende teorem som viser hva slags egenskaper maksimalt konsistente mengder har. Heller ikke her gir vi noe detaljert bevis, men alt som er nevnt i satsen følger lett fra de satsene som er detlajert bevist i Hughes & Cresswell [1] på side 152 - 154.

Teorem 4.2 Anta ∆ er en formelmengde i L som er maksimalt S-konsistent. Da gjelder følgende:

(i) (Aα)(αêFm(L) → ¬(αê∆ & (¬α)ê∆))
(ii) (Aα)(αêFm(L) → αê∆ v (¬α)ê∆)
(iii) (Aα)(αêFm(L) → ((¬α)ê∆↔ ¬(αê∆)))
(iv) (Aα)(αêFm(L) → S |- α → αê∆)
(v) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → α, (α→β)ê∆ → βê∆)
(vi) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α→β)ê∆ ↔(αê∆ → βê∆)))
(vii) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α↔β)ê∆ ↔(αê∆ ↔ βê∆)))
(viii) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((αvβ)ê∆ ↔(αê∆ v βê∆)))
(ix) (Aα)(Aβ)(α,βêFm(L) → ((α&β)ê∆ ↔(αê∆ & βê∆)))
(x) S |- α → αê∆

Man ser fra denne satsen at dersom ∆ er en maksimalt S-konsistent mengde har man ∆ også er en sannhetsmengde. Dette følger fra punktene (i), (iii) og (v).

Vi har nå samlet sammen de begrepsdannelsene og hjelpesetningene vi trenger for å kunne levere et bevis for fullstendighetsdelen til Teorem 3.3. Vårt bevis er som følger:

Bevis: Anta α er en vilkårlig formel i L og anta (1) ¬(S0.5 |-α). Ved hjelp av definisjonen av konsistent formelmengde kan vi da slutte at {¬α} er en S0.5-konsistent formelmengde. Fra dette og Lindenbaums lemma, Teorem 4.1 følger at det finnes en maksimalt S0.5-konsistent formelmengde Γ slik at (2) {¬α} Inkl Γ. Definer R ved å sette:

(3) R = Mg(α: αêFm(L) & LαêΓ)

Definer M ved å sette: (4) M= <Γ,R>. Vi skal vise at M er en S0.5-modell, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 3.2. La oss først bemerke at siden Γ er maksimalt konsistent har vi at Γ oppfyller kravene til en sannhetsmengde. Videre følger direkte fra definisjonen (3) at

(5) (Aα)(αêFm(L) → (LαêΓ ↔ αêR)). Dette viser at M er en halvsyntaktisk modell. For å vise at M er en S0.5-modell må vi i lys av Definisjon 3.2 vise følgende:

(6) Er LαêΓ → αêΓ

(7) Er α, α→βêR → βêR

(8) PC |- α → αêR

La oss først ta for oss (6). Anta αêFm(L). Da har vi S0.5|- Lα→ α. Ved hjelp Teorem 4.2, punkt (iv) kan vi da slutte: (Lα→α)êΓ. Ved hjelp av det samme teorem, punkt (vi) følger Lα êΓ → αêΓ. Dette viser at (6) holder.

La oss så vise at (7) holder: Anta α,βêFm(L) og at (9) (α→β)êR & αêR. Siden M er en halvsyntaktisk modell følger fra (5) og (9) at (10) L(α→β)êΓ & LαêΓ. Siden Γ er en maksimalt konsistent mengde har vi i lys av Teorem 4.2 at alle S0.5-teoremer er med i Γ. Dette innebærer at (11)(Lα &(α→β) → Lβ)êΓ. Fra (10) og (11) kan vi ved hjelp av Teorem 4.2 utlede at LβêΓ. Fra dette og (5) følger så βêR. Dette viser at (7) holder.

Det gjenstår å vise riktigheten av (8). Anta PC|-α. ved hjelp av LPC følger da S0.5 |-Lα. Fra dette og det siste punktet i Teorem 4.2 kan man slutte at LαêΓ. Fra dette og (5) følger så åpenbart at αêR.

Vi har nå vist at modellen M oppfyller alle de kravene som stilles til en S0.5-modell. La oss betegne klassen av alle S0.5-modeller med |S0.5|. Da kan resultatet sammenfattes slik: (10) M=<Γ,R>ê|S0.5|. Siden {¬α} Inkl Γ følger at (¬)αêΓ og derfor, siden Γ er en makssimalt konsistent mengde at ¬(αêΓ). Da har vi: ¬(αê π;1(M)). Fra dette følger: (EM) (Mê|S0.5| & ¬(αê π;1(M))). Vi har nå vist at dersom ¬(S0.5 |- α) så finnes det en S0.5-modell M der α ikke holder, ie. der ¬(αêπ;1(M)). Dette impliserer at dersom α er S0.5-gyldig, dvs. α holder i enhver S0.5-modell, så er α et teorem i S0.5.

Dette viser at den andre halvdelen, det vil si punkt (b) i Teorem 3.3 holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at S0.5 er fullstendig med hensyn på mengden av alle S0.5-modeller. **QED.**

Med dette resultat har vi så oppnådd det som var målet med dette notatet.

Referanser

Cresswell [1]	Cresswell, M.J. ,1966, "The completeness of S0.5", *Loqique et Analyse,* Vol 9. (No. 34) pp. 263 -266
Hughes & Cresswell [1]	Hughes,G.E og Cresswell, M.J., 1968, *An Introduction to Modal Logic*, London, Methuen and Co Ltd
Lemmon [1]	Lemmon, E.J., 1959, "Is there only one correct system of modal logic?" Aristotelian Society Supplementary Volume XXXIII, pp. 23 -40

@ Morten Harboe Rognes